Roll No. ....

ED–2708

B. A./B. Sc./B. Sc. B. Ed. (Part II) EXAMINATION, 2021

MATHEMATICS

Paper First

(Advanced Calculus)

Time : Three Hours

Maximum Marks : 50

नोट : सभी प्रश्न अनिवार्य हैं। प्रत्येक इकाई से कोई दो भाग हल कीजिए। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

All questions are compulsory. Attempt any *two* parts from each Unit. All questions carry equal marks.

इकाई—1

(UNIT—1)

1. (अ) सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक अभिसारी अनुक्रम परिबद्ध होता है, तथापि इसका विलोम सदैव सत्य नहीं है।

Prove that every convergent sequence is bounded. However the converse is not true in general.

(ब) श्रेणी :

$$1+\frac{1+2}{\lfloor 2}+\frac{1+2+3}{\lfloor 3}+\frac{1+2+3+4}{\lfloor 4}+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

के अभिसरण के लिए परीक्षण कीजिए।

Test for convergence of the series :

$$1+\frac{1+2}{\lfloor 2}+\frac{1+2+3}{\lfloor 3}+\frac{1+2+3+4}{\lfloor 4}+\ldots\ldots\ldots\ldots$$

(स) सिद्ध कीजिए कि अनुक्रम $\{a_n\}$ अभिसारी है जहाँ

$$a_n=1+\frac{1}{\lfloor 1}+\frac{1}{\lfloor 2}+\frac{1}{\lfloor 3}+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+\frac{1}{\lfloor n}$$

Prove that sequence $\{a_n\}$ is convergent where

$$a_n=1+\frac{1}{\lfloor 1}+\frac{1}{\lfloor 2}+\frac{1}{\lfloor 3}+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+\frac{1}{\lfloor n}$$

इकाई—2

(UNIT—2)

2. (अ) यदि

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{1+e^{1/x}}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

दर्शाइये कि f, $x = 0$ पर संतत है किन्तु अवकलनीय नहीं है।

If :

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{1+e^{1/x}}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

show that f is continuous but not differentiable at $x = 0$.

(ब) रोले प्रमेय का सत्यापन फलन $f(x) = x^3 - 12x$ के लिए अंतराल $0 \le x \le 2\sqrt{3}$ में कीजिए।

Verify Rolle's theorem for the function $f(x) = x^3 - 12x$ in the interval $0 \le x \le 2\sqrt{3}$.

(स) मध्यमान प्रमेय के प्रयोग से सिद्ध कीजिए कि :

$$\frac{x}{1+x^2} < \tan^{-1} x < x, \text{ जहाँ } x > 0.$$

Use mean value theorem to prove that :

$$\frac{x}{1+x^2} < \tan^{-1} x < x, \text{ where } x > 0.$$

इकाई—3

(UNIT—3)

3. (अ) यदि :

$$u = \tan^{-1} \frac{x^2 + y^2}{x + y},$$

तो सिद्ध कीजिए कि :

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{2}\sin 2u$$

If :

$$u = \tan^{-1} \frac{x^2 + y^2}{x + y},$$

then prove that :

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{2}\sin 2u$$

(ब) फलन e^{x+y} का (0, 0) पर $n = 3$ के लिए टेलर का सूत्र ज्ञात कीजिए।

Obtain Taylor's formula for the function e^{x+y} at (0, 0) for $n = 3$.

(स) यदि :

$$u = x + y - z$$
$$v = x - y + z$$
$$w = x^2 + y^2 + z^2 - 2yz$$

तो दर्शाइये कि :

$$\frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)} = 0.$$

If :

$$u = x + y - z$$
$$v = x - y + z$$
$$w = x^2 + y^2 + z^2 - 2yz$$

then show that :

$$\frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)} = 0.$$

इकाई—4

(UNIT—4)

4. (अ) सरल रेखाओं $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ के कुल का अन्वालोप ज्ञात कीजिए जबकि $a^2 + b^2 = c^2$, जहाँ c एक अचर है।

Find the envelope of the family of straight lines $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ when $a^2 + b^2 = c^2$, where c is a constant.

(ब) फलन :

$$x^2 + y^2 + z^2$$

का निम्नष्ठ मान ज्ञात कीजिए, जबकि

$$ax + by + cz = p.$$

Find the minimum value of

$$x^2 + y^2 + z^2$$

when

$$ax + by + cz = p.$$

(स) दर्शाइये कि एक चक्रज का केन्द्रज एक अन्य चक्रज होता है।

Show that the evoluate of a cycloid is another cycloid.

इकाई—5

(UNIT—5)

5. (अ) सिद्ध कीजिए कि :

$$\Gamma m \, \Gamma\left(m + \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2m-1}} \Gamma 2m$$

जहाँ m एक धनात्मक वास्तविक संख्या है।

Prove that :

$$\Gamma m \, \Gamma\left(m + \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2m-1}} \Gamma 2m$$

where m is a positive real number.

(ब) $\iint_R xy \, dx \, dy$ का मान निकालिए, जहाँ समाकलन क्षेत्र R वृत्त $x^2 + y^2 = a^2$ का धन चतुर्थांश है।

Evaluate, $\iint_R xy\,dx\,dy$ where region of integration R is positive quadrant of the circle $x^2 + y^2 = a^2$.

(स) निम्नलिखित समाकल में समाकलन का क्रम बदलिए :

$$\int_0^a \int_{\frac{x^2}{a}}^{2a-x} f(x, y)\,dx\,dy$$

Change the order of integration in following integral :

$$\int_0^a \int_{\frac{x^2}{a}}^{2a-x} f(x, y)\,dx\,dy$$