

प्रथम प्रश्न पत्र

बीजगणित एवं त्रिकोणमिति (Algebra & Trigonometry)

सभी पाँच प्रश्नों के उत्तर दीजिए प्रत्येक इंग्रैज से दो प्रश्न करना अनिवार्य है सभी प्रश्नों के अंक समान हैं -

Unit-I

1) आव्यूह A को प्रसामान्य रूप रूप में बदलिए और इसकी जाति ज्ञात कीजिए जहाँ
Reduce the matrix A into its normal form and find the rank where

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

2) यदि $R_1 = [3, 1, -4]$, $R_2 = [2, 2, -3]$, $R_3 = [0, -4, 1]$ को दर्शाए कि पंक्ति आव्यूह R_1, R_2 एवं R_3 रैखिकतः परतंत्र हैं।

If $R_1 = [3, 1, -4]$, $R_2 = [2, 2, -3]$, $R_3 = [0, -4, 1]$, then show that R_1, R_2 and R_3 row matrix are linearly dependent.

3) निम्न मैट्रिक्स को समानोत्त एशेलीन रूप में बदलिए एवं जाति ज्ञात कीजिए
Reduce the following matrix to reduced echelon form and determine its rank

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

Unit-II

1) कार्डेन विधि से निम्नलिखित समीकरण को हल कीजिए:-

Solve the following equation by Cardan's Method

$$35x^3 - 18x^2 + 1 = 0$$

2) यदि α, β, γ समीकरण $x^3 + px + q = 0$ के मूल हैं तब मूल $\frac{\beta\gamma}{\alpha}, \frac{\alpha\gamma}{\beta}, \frac{\alpha\beta}{\gamma}$ के लिए समीकरण ज्ञात कीजिए।

If α, β, γ are roots of the equation $x^3 + px + q = 0$ find the equation whose roots are $\frac{\beta\gamma}{\alpha}, \frac{\alpha\gamma}{\beta}, \frac{\alpha\beta}{\gamma}$

3) यदि किसी समीकरण $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ के किसी दो मूलों का योग तीसरे मूल के बराबर हो तो सिद्ध कीजिए कि $p^3 - 41pq + 8r = 0$

Unit - III

1) सिद्ध कीजिए कि किसी दो प्रसामान्य समुहों का सर्वनिष्ठ भी एक प्रसामान्य समुह है।

Prove that the intersection of any two normal subgroups of a group is a normal subgroup.

2) फलन $f(x): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ निम्न प्रकार से परिभाषित है $f(x) = \cos x$, \mathbb{R} वास्तविक संख्याओं का समुच्चय है। फलन f के लिए एकैक आच्छादक का परीक्षण कीजिए।
Function $f(x): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ defined as $f(x) = \cos x$, where \mathbb{R} is the set of real numbers. Test for f , the function is being one one onto

3) दर्शाइए कि उपसमुह के दोई दो दक्षिण सहसमुच्चय या वॉ विसंघीय होते हैं या समान होते हैं।
Show that any two right cosets of a subgroup are either disjoint or identical.

Unit - IV

(1) समुहों की समागति का मूलभूत प्रमेय लिखिए तथा सिद्ध कीजिए।
State and prove fundamental theorem of homomorphism of groups.

(2) दर्शाइए कि दो उपसमूहों का सर्वनिष्ठ भी एक उपसमूह होता है।
Show that intersection of two subgroups is a subgroup.

(3) दर्शाइए कि किसी वलय $(R, +, \cdot)$ का उपसमुच्चय एक उपवलय होता है यदि और केवल यदि
Show that a subset S of the ring $(R, +, \cdot)$ is a subring if

$$(i) a \in S, b \in S \Rightarrow a - b \in S \quad \forall a, b \in S$$

$$(ii) a \in S, b \in S \Rightarrow a \cdot b \in S \quad \forall a, b \in S$$

Unit - V

1) यदि $x > 0$ तब ग्रेगोरी श्रृंखला का उपयोग करके सिद्ध कीजिए कि
If $x > 0$, using Gregory's series prove that

$$\tan^{-1} x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$$

2) हल कीजिए Solve that $\tan^{-1} 2x + \tan^{-1} 3x = \frac{\pi}{4}$

3) सिद्ध कीजिए Prove that

$$64 \cos^7 \theta = \cos 7\theta + 7 \cos 5\theta + 21 \cos 3\theta + 35 \cos \theta$$

ShubekR

19/01/22

8109851896

सभी पाँच प्रश्नों के उत्तर दीर्घ प्रत्येक इकाई से दो प्रश्न करना अनिवार्य हैं सभी प्रश्नों के समान हैं -

Unit-I

1) ϵ - δ तकनीक के प्रयोग से वरिष्ठ Using ϵ - δ technique, show that

$$\lim_{x \rightarrow 2} (2x+7) = 11$$

(2) यदि $y = a \cos(\log x) + b \sin(\log x)$ को सिद्ध कीजिए कि

If $y = a \cos(\log x) + b \sin(\log x)$, then prove that

$$x^2 y_2 + x y_1 + y = 0 \text{ तथा } x^2 y_{n+2} + (2n+1)x y_{n+1} + (n^2+1)y_n = 0$$

3) सिद्ध कीजिए कि Prove that

$$\log \sec x = \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{12} + \frac{x^6}{45} + \dots$$

Unit-II

(1) वक्र $x^3 + y^3 = 3axy$ की सभी अंतस्पर्शियाँ ज्ञात कीजिए।

Find all asymptotes of the curve $x^3 + y^3 = 3axy$.

(2) वक्र $x^3 + y^3 = 3axy$ का अनुरेखण कीजिए।

Trace the curve $x^3 + y^3 = 3axy$.

(3) सिद्ध कीजिए कि कैटेनरी $y = c \cosh\left(\frac{x}{c}\right)$ के बिन्दु (x, y) पर वक्रता त्रिज्या $\frac{y^2}{c}$ है।

Prove that the radius of curvature of catenary $y = c \cosh\left(\frac{x}{c}\right)$ at a point (x, y) is y^2/c

Unit-III

(1) $\int_0^{\pi/2} \frac{x}{\sin x + \cos x} dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

Find the value of $\int_0^{\pi/2} \frac{x}{\sin x + \cos x} dx$

(2) सिद्ध कीजिए कि Prove that

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{\sin x} dx = \frac{\pi}{4}$$

- (3) परवलयों $y^2 = 4ax$ और $x^2 = 4ay$ के बीच उभयनिष्ठ क्षेत्रफल को ज्ञात करें।
 Find the common area enclosed by the parabolas $y^2 = 4ax$ and $x^2 = 4ay$.

Unit - IV

- 1) हल कीजिए Solve $x^2 dy + y(x+y) dx = 0$
- 2) निम्नलिखित वक्र कुल की लाम्बार्थोगोनल संछेदियाँ ज्ञात कीजिए:-
 $r^n = a^n \cos n\theta$

जहाँ a कुल का प्राचल है।

Find the orthogonal trajectories of the family of curves:-

$$r^n = a^n \cos n\theta$$

where a is parameter of family.

- (3) हल कीजिए solve $\frac{dy}{dx} = \frac{x-y+3}{2x-2y+5}$

Unit - V

- 1) हल कीजिए Solve $\frac{d^2y}{dx^2} - 4y = e^x + \sin 2x$

- (2) हल कीजिए Solve $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + y = x^2 e^{3x}$

- (3) हल कीजिए $x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - x \frac{dy}{dx} - 3y = x^2 \log x$

~~Shalika~~
 19/01/22
 8109851896

सभी पाँच प्रश्नों के उत्तर दीजिए प्रत्येक इकाई से दो प्रश्न करना अनिवार्य है सभी प्रश्नों के अंक समान हैं -

Unit-I

1) यदि $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ तीन असमतलीय सदिश हैं तो दर्शाइए कि
 If $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ are three non-coplanar vectors, then show that:-
 $[\vec{a} \times \vec{b}, \vec{b} \times \vec{c}, \vec{c} \times \vec{a}] = [abc]^2$

(2) यदि $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ तब $\text{grad } r^n$ का मान ज्ञात कीजिए।
 If $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, then find $\text{grad } r^n$

(3) यदि a एक स्थिर सदिश है तो दर्शाइए कि
 If a is constant vector, then show that
 (i) $\text{div}(a \times a) = 0$ (ii) $\text{Curl}(a \times a) = -2a$

Unit-II

(1) $\int_C (yz dx + (zx+1) dy + xy dz)$ का मान ज्ञात कीजिए जबकि C एक $(1, 0, 0)$ तथा $(2, 1, 4)$ से गुजरने वाला पथ है।
 Evaluate $\int_C (yz dx + (zx+1) dy + xy dz)$, where C is any path passing from $(1, 0, 0)$ and $(2, 1, 4)$

(2) $\int_C (3x^2 - 8y^2) dx + (4y - 6xy) dy$ के लिए ग्रीन प्रमेय स्थापित कीजिए, जहाँ C परवलयों $y = \sqrt{x}$ व $y = x^2$ से परिबद्ध क्षेत्र की परिसीमा है।
 Verify Green's theorem in the plane for $\int_C (3x^2 - 8y^2) dx + (4y - 6xy) dy$ where C is the boundary of the region bounded by the parabolas $y = \sqrt{x}$ and $y = x^2$

(3) दर्शाइए कि $\iint_S (axi + byj + czk) \cdot \vec{n} ds = \frac{4}{3}\pi (a+b+c)$ जहाँ S गोलों $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ का सम्पूर्ण पृष्ठ है।
 Show that $\iint_S (axi + byj + czk) \cdot \vec{n} ds = \frac{4}{3}\pi (a+b+c)$ where S is

Unit - III

(1) आंकव $x^2 - xy - 2y^2 - x - 4y - 2 = 0$ का अनुरक्षण कीजिए।

Trace the conic $x^2 - xy - 2y^2 - x - 4y - 2 = 0$

(2) सिद्ध कीजिए कि संनाभि आंकव समरेखण पर प्रतिच्छेद करते हैं।

Prove that confocals cut at right angles.

(3) किसी आंकव में सिद्ध कीजिए कि लम्बरूप नाभिकाल जीवाओं के व्युत्क्रमों का योग अचर होता है।

In any conic, prove that the sum of inverse of orthogonal focal chords is constant

Unit - VI

(1) उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका अक्ष रेखा $\frac{x}{1} = -\frac{y}{2} = \frac{z}{3}$ के समान्तर है तथा दीर्घवृत्त $x^2 + 2y^2 = 1, z = 0$ है।

Find the equation of cylinder whose generators are parallel to the line $\frac{x}{1} = -\frac{y}{2} = \frac{z}{3}$ and the base curve is $x^2 + 2y^2 = 1, z = 0$

(2) उस शंकु का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका शीर्ष (α, β, δ) और आधार वक्र $ax^2 + by^2 = 1, z = 0$ है।

Find the equation of the cone whose vertex is (α, β, δ) and base $ax^2 + by^2 = 1, z = 0$

(3) गोलों का समीकरण ज्ञात कीजिए जो गोलों $x^2 + y^2 + z^2 + 3x - 3y + 2z = 0, x^2 + y^2 + z^2 + 2x - y - z + 10 = 0$ के समान्तर हैं और बिन्दु $(0, 1, 2)$ से होकर जाते हैं।

Find the equation of the sphere which is coaxial with the sphere $x^2 + y^2 + z^2 + 3x - 3y + 2z = 0, x^2 + y^2 + z^2 + 2x - y - z + 10 = 0$ and passes through the point $(0, 1, 2)$

Unit - V

(1) प्रतिबंध ज्ञात कीजिए जबकि समकाल $lx + my + nz = p$ परवलय $ax^2 + by^2 = 2cz$ को स्पर्श करता है।

To find the condition that the plane $lx + my + nz = p$ may touch the paraboloid $ax^2 + by^2 = 2cz$

(2) दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ के समतल $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ द्वारा प्रतिच्छेद का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
Find area of the section of the ellipsoid $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ by the plane $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$

(3) दर्शाइए कि एक दीर्घवृत्त के नाभिकाल आंकवों की उत्केन्द्रताओं का गुणनफल $\frac{1}{2}$ है।