

सभी पाँच प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्रत्येक इकाई से दो प्रश्न करना अनिवार्य है।
सभी प्रश्नों के अंक समान हैं -

Unit-I

1) सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक कौंसी अनुक्रम परिबद्ध होता है।
Prove that every Cauchy sequence is bounded

2) श्रेणी का अभिसरण के लिए परीक्षण कीजिए -
Test for convergence the series:-

$$x^2 + \frac{2^2}{3 \cdot 4} x^4 + \frac{2^2 \cdot 4^2}{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} x^6 + \frac{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2}{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8} x^8 + \dots \quad x > 0$$

3) सिद्ध कीजिए Prove that

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{(n+1)(n+2) \dots (n+n)}{n^n} \right]^{1/n} = \frac{4}{e}$$

Unit-II

1) निम्नलिखित का $x=0$ पर सातत्यता परीक्षण कीजिए
Test the continuity of the following function at $x=0$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{1/x} - 1}{e^{1/x} + 1}, & \text{when } x \neq 0 \\ 0, & \text{when } x = 0 \end{cases}$$

2) दर्शाइए कि फलन $x=0$ पर संतत व अकलनीय है।
Show that the function is continuous and differentiable at $x=0$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

3) दर्शाइए कि $\log(1+x)$ प्रत्येक $x > 0$ के लिए $x - \frac{x^2}{2}$ और $\frac{x - x^2}{2(1+x)}$ के मध्य स्थित है।
Show that $\log(1+x)$ lie between $x - \frac{x^2}{2}$ and $\frac{x - x^2}{2(1+x)}$ for

every $x > 0$

Unit - III

1) यदि $u = \sin^{-1} \frac{x+y}{\sqrt{x+y}}$ तो सिद्ध कीजिए कि then prove that

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{2} \tan u.$$

2) यदि $u = \tan^{-1} \frac{xy}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$ तो सिद्ध कीजिए कि then prove that

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{1}{(1+x^2+y^2)^{3/2}}$$

3) यदि $y_1 = \cos x_1, y_2 = \sin x_1 \cos x_2$ और $y_3 = \sin x_1 \sin x_2 \cos x_2$ तो सिद्ध कीजिए कि then prove that

$$\frac{\partial(y_1, y_2, y_3)}{\partial(x_1, x_2, x_3)} = -\sin^3 x_1 \sin^2 x_2 \sin x_3$$

Unit - IV

1) वक्र कुल $\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} = 1$ का अन्वलीप ज्ञात कीजिए जबकि $ab = c^2$ जहाँ a और b प्राचल हैं तथा c कीर्डी अचर है।

Find the envelope of the family of curves $\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} = 1$ when $ab = c^2$ where a & b are parameters & c is any constant

2) दर्शाइए कि एक चक्रीय का केन्द्रण एक अन्य चक्रीय होता है।
Show that evolute of any cycloid is another cycloid.

3) एक समतल त्रिभुज में $u = \cos A \cos B \cos C$ का उच्चिष्ठ मान ज्ञात कीजिए।
In a plane triangle, find the maximum value of $u = \cos A \cos B \cos C$.

Unit - V

1) सिद्ध कीजिए कि Prove that $\Gamma(m) \Gamma(m+1/2) = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(2m)}{2^{2m-1}}$ ($m > 0$)

2) दिशा, समाकलन में समाकलन का क्रम बदलिए
Change the Order of Integration in the double integral

$$\int_0^{2a} \int_{x^2/4a}^{3a-x} f(x,y) dx dy.$$

3) $\int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \int_0^{\sin z} x^2 \sin y dz dy dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

$$\int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \int_0^{\sin z} x^2 \sin y dz dy dx.$$

Handwritten
19/01/22
8109851896

द्वितीय प्रश्न पत्र

अवकल समीकरण [Differential Equations]

सभी पाँच प्रश्न में उत्तर दीजिए / प्रत्येक डीज में एक प्रश्न करना अनिवार्य है सभी प्रश्नों में अंक समान हैं -

Unit-I

1) सिद्ध कीजिए कि Prove that $\frac{2x}{x} J_n(x) = J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x)$

2) सिद्ध कीजिए कि Prove that $\int_0^\infty e^{-ax} J_0(bx) dx = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

3) निम्नलिखित स्टर्म-ल्युविल समस्या के सभी आइगेन मानों और आइगेन फंक्शनों को ज्ञात कीजिए Find all eigen values and eigen functions of the following Sturm-Liouville problem:-

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \lambda y = 0 \quad (y(0) = 0, y(\pi) = 0)$$

Unit-II

1) मूल्यांकन कीजिए Evaluate $\int_0^\infty \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} dt$

2) मान ज्ञात कीजिए Find the value of :- $L\{e^t \sin^2 t\}$

3) संवलन प्रमेय का उपयोग करके ज्ञात कीजिए Use the Convolution theorem to find $\rightarrow L^{-1}\left\{\frac{1}{P(P^2+4)^2}\right\}$

Unit-III

1) पूर्ण एवं विचित्र समाकलों को ज्ञात कीजिए Find the complete and singular solutions $p^3 + q^3 = 27z$

2) चार्पिट विधि से हल कीजिए Solve by Charpit's Method $Px + Qy + Rz = 0$

3) लैग्रान्ज विधि से हल कीजिए Solve by Lagrange's Method

Unit - IV

- 1) समीकरण $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ का वर्गीकरण और विलिखित रूप में समान्यन कीजिए।
Classify and reduce the equation $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ to canonical form.
- 2) मोंजे विधि से हल कीजिए
Solve by Monge's Method
$$pt - qs = q^3$$
- 3) हल कीजिए Solve
$$(\partial^2 - 6\partial\partial' + 9\partial'^2)z = 12x^2 + 36xy$$

Unit V

- 1) अंतराल $[0, 1]$ में वक्रों $x=y$ एवं $y=x^2$ के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए।
Find the distance between the curves $y=x$ and $y=x^2$ in the interval $[0, 1]$
- 2) उन वक्रों को ज्ञात कीजिए जिन पर फलन $I[y(x)] = \int_1^2 \frac{x^3}{y^2} dx$, $y(1)=0$, $y(2)=3$ का चरम मान प्राप्त किया जा सकता है।
Find the curves on which the extremal value of the functional $I[y(x)] = \int_1^2 \frac{x^3}{y^2} dx$, $y(1)=0$, $y(2)=3$ can be obtained.
- 3) फलन $I[y(x)] = \int_0^{\pi/2} (y'^2 - y^2) dx$, $y(0)=0$, $y(\pi/2)=1$ के चरम मान के लिए परीक्षण कीजिए।

Test the extremal value of the following functional

$$I[y(x)] = \int_0^{\pi/2} (y'^2 - y^2) dx$$

$$y(0)=0, \quad y(\pi/2)=1$$

Shubh
19/01/22
8109851896

सभी पाँच प्रश्न के उत्तर दीजिए। प्रत्येक छेड़ से दो प्रश्न करना अनिवार्य है सभी प्रश्नों के अंक समान हैं:-

Unit-I

1) रेखाओं $x+y=1$, $y-x=1$, $y=2$ द्वारा निर्मित त्रिभुज की भुजाओं के अनुदिश तीन बल P, Q, R क्रियाशील हैं। उनके परिणामी की क्रिया रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए।
Three forces P, Q, R act along the sides of the triangle formed by the line $x+y=1$, $y-x=1$, $y=2$. Find the equation of the line of action of their resultant.

2) एक समान आयताकार पट्टा जिसकी a तथा b लम्बाइयों की ठीरे एक ही क्षैतिज रेखा में c दूरी पर स्थित दो खंभों पर रखी है और पट्टा उल्टा धर: साम्यावस्था में है सिद्ध कीजिए कि यदि a लम्बाई की ठीर उल्टा धर रेखा से θ कोण बनाये तब $2c \cos 2\theta = b \cos \theta - a \sin \theta$.

A uniform rectangular board rests in equilibrium with its sides a and b on two smooth pegs in the same horizontal line at a distance c apart. Prove that the side of length a makes with the vertical an angle θ given by $2c \cos 2\theta = b \cos \theta - a \sin \theta$.

3) यदि α और β एक सामान्य कैटेनरी के एक हिस्से के सिरे पर स्पर्श रेखाओं के क्षैतिज से झुकाव हों तथा कैटेनरी के एक हिस्से की लम्बाई l हो तो दर्शाइए कि एक सिरे से दूसरे की ऊँचाई है:-

If α and β are the inclinations to the horizon of the tangents at the extremities of portion of a common catenary and l the length of the portion, show that the height of the one extremity above the other is

$$\frac{l \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}$$

Unit-II

1) रेखा $\frac{x-1}{l} = \frac{y-g}{m} = \frac{z-h}{n}$ के संयुग्मी रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए।

Find out the equation of conjugate line of the line

(2) यदि P तथा Q दो अप्रतिच्छेदी बल भिन्नी दिशाएँ लम्बवत् हैं व
 केन्द्रीय अक्ष से उनकी क्रिया रेखाओं की दूरियों का अनुपात $Q^2 : P^2$ है।
 If P and Q be two non intersecting forces whose direction are
 perpendicular, show that the ratio of distance of the central
 axes from their lines of action is Q^2 to P^2 .

3) समतल $lx+my+nz=1$ की शून्य विक्षेप की स्थिति ज्ञात कीजिए।
 Find the null point of the planes $lx+my+nz=1$

Unit-III

1) m द्रव्यमान का एक ठण हल्ले तार, जो दो स्थिर बिन्दुओं के बीच तना है,
 तनाव T है से बाँध दिया गया है। यदि दोनों सिरों से ठण की दूरियाँ a, b हैं
 तो सिद्ध कीजिए कि m द्रव्यमान के एक अल्प अनुप्रस्थ दोलन का आवर्तकाल
 $2\pi \sqrt{mab/T(a+b)}$ है।

A particle of mass m is attached to a light wire which is stretched
 tightly between two fixed points with a tension T . if a, b
 are the distances of the particle from the two ends, prove that the
 period of a small transverse oscillation of mass m is:-

$$2\pi \sqrt{mab/T(a+b)}$$

2) एक सरल रेखा में सरल आवर्त गति करते हुए एक बिन्दु के वेग V_1 तथा
 V_2 हैं जबकि किसी केन्द्र से दूरियाँ x_1 और x_2 हैं। दर्शाइए कि गति का
 आवर्तकाल है:-

A point does simple harmonic motion along a straight line with
 velocities V_1 and V_2 when its distances from the centre are
 x_1 and x_2 show that the period of motion is

$$2\pi \sqrt{\frac{x_1^2 - x_2^2}{V_2^2 - V_1^2}}$$

3) यदि एक गोली का क्षैतिज परास R के लिए उड़ान काल T है तो
 सिद्ध कीजिए कि प्रक्षेप कोण $\tan^{-1}\left(\frac{gT^2}{2R}\right)$ होगा।

Prove that if the time of flight of a bullet over a horizontal
 range R is T , the inclination of the direction of projection
 to the horizontal is

Unit - VI

- 1) एक कण V वेग से एक चिकनें क्षैतिज समतल पर ऐसे माध्यम में प्रक्षेपित किया जाता है जिसकी प्रति इकाई द्रव्यमान पर प्रतिरोध K (वेग) है। दर्शाए कि t समय में पश्चात् चली गई दूरी x निम्नोक्त से दी जाती है :-

A particle is projected with velocity V along a smooth horizontal plane in a resisting medium whose resistance per unit mass is K (velocity). Show that the distance travelled x at the time t are given by $x = \frac{V}{K}(1 - e^{-kt})$

- 2) एक कण आकाश में उच्च गुरुत्वाकर्षण के प्रभाव में ऐसे माध्यम में गति करता है जिसके प्रतिरोध बल उसके वेग के समानुपातिक है। कण की गति की विवेचना कीजिए।

The particle falls under gravity (supposed constant) in a resisting medium whose resistance varies at the velocity. Discuss the motion of the particle.

- 3) एक कण एक पथ में इस प्रकार गतिमान है कि उसका त्वरण सर्वदा एक स्थिर बिन्दु की ओर दिष्ट है तथा $\frac{\mu}{(\text{distance})^2}$ के बराबर है। दर्शाए कि पथ एक शंकु काट है तथा उत्पन्न हुई तीन स्थितियों पर विचार कीजिए।

A particle moves in a path so that its acceleration is always directed to a fixed point and is equal to $\frac{\mu}{(\text{distance})^2}$. Show that the path is a conic section and distinguish between the three cases that arise.

Unit - V

- 1) ध्रुवीय निर्देशांक (गोलीय निर्देशांक) के पदों में किसी कण का त्वरण ज्ञात कीजिए।

To find the acceleration of a particle in terms of polar co-ordinates (spherical co-ordinates)

2) एक ठग V वेग से एक चिकने क्षैतिज समतल पर ऐसे माध्यम में प्रक्षेपित किया जाता है जिसकी प्रति इकाई संवहति पर प्रतिरोध K (वेग) है। दर्शाए कि t समय में पश्चात् चली गई दूरी s निम्नांकित से दी जाती है :-

A particle is projected with velocity V along a smooth horizontal plane in a resisting medium whose resistance per unit mass is K (velocity). Show that the distance travelled s at the time t are given by

$$s = \frac{V}{K}(1 - e^{-kt})$$

3) यदि एक ठग त्रिविमीय दिशा में गतिमान है तो x, y, z अक्षों के पदों में ठग का त्वरण ज्ञात कीजिए।

If a particle moves in the three dimensional, then find the acceleration of a particle in terms of Cartesian co-ordinates.

Shakke
19/01/22
8109851896