अर्द्धवार्षिक परीक्षा -2022
विषय - गणित
B.Sc-III
प्रथम प्रश्न पत्र
विश्लेषण (Analysis)

पूर्णांक - 50

सभी पाँच प्रश्न के उत्तर दीजिए प्रत्येक ईकाई से दो प्रश्न करना अनिवार्य है सभी प्रश्नों के अंक समान है -

Unit-I

(1) सिद्ध कीजिए कि किसी दूरीक समष्टि में प्रत्येक संवृत्त गोलक एक संवृत्त समुच्चय होता है।
Prove that in a metric space, every closed sphere is a closed set

(2) किसी दूरीक समष्टि में प्रत्येक अभिसारी अनुक्रम एक कौशी अनुक्रम होता है, सिद्ध कीजिए।
Prove that every convergent sequence in a metric space is a Cauchy sequence.

(3) दूरीक समष्टि की परिभाषा लिखिए। एक दूरीक समष्टि (X, d) में सिद्ध कीजिए कि :-
Write the definition of metric space. In a metric space (X, d) prove that

$$|d(x,z) - d(y,z)| \le d(x,y) \ \forall \ x, y, z \in X$$

Unit-II

(1) प्रथम गणनीय समष्टि की परिभाषा लिखिए। सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक दूरीक समष्टि प्रथम गणनीय होता है।
Write the definition of first countable space. Prove that every metric space is first countable.

(2) सिद्ध कीजिए कि, एक संहत दूरीक समष्टि का एक संवृत्त उपसमुच्चय संहत होता है।
Prove that a closed subset of a compact metric space is compact

(3) माना कि (X, d) तथा (Y, ρ) दो दूरीक समष्टियाँ है और $f : X \to Y$ एक फलन है तब f संतत होगा यदि और केवल यदि $f^{-1}(G)$, X में विवृत है जब G, Y में विवृत्त है।
Let (X, d) and (Y, ρ) are two metric space and $f : X \to Y$ is a function

Unit-III

(1) सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक द्विरैखिक रूपांतरण वृत्त या सरल रेखा को वृत्त या सरल रेखा पर ही प्रतिचित्रित करता है|
Prove that every bilinear transformation transforms circle or straight line into Circle or straight line.

(2) यदि $f(z) = u + iv$ एक विश्लेषिक फलन है तथा $z = re^{i\theta}$ जहाँ u, v, r, θ सभी वास्तविक है तो दर्शाइए कि कॉशी रीमान समीकरण :- $\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}$, $\frac{\partial v}{\partial r} = \frac{-1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}$ है|
If $f(z) = u + iv$ is an analytic function and $z = re^{i\theta}$ where u, v, r, θ all are, show that Cauchy - Riemann equations are :-

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial v}{\partial r} = \frac{-1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}$$

(3) दर्शाइए कि रूपान्तरण $w = \frac{2z+3}{z-4}$ वृत्त $x^2+y^2-4x=0$ को सरल रेखा $4u+3=0$ पर प्रतिचित्रित करता है|
Show that the transformation $w = \frac{2z+3}{z-4}$ maps circle $x^2+y^2-4x=0$ into straight line $4u+3=0$.

Unit-VI

(1) सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक निरपेक्षत: अभिसारी द्विक श्रेणी अभिसारी होती है|
Prove that every absolutely convergent double series is convergent.

(2) दर्शाइए कि फलन $(0,0)$ पर संतत है पर अवकलनीय नही
Show that the function is continuous but not differentiable at $(0,0)$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2} & (xy) \neq (0,0) \\ 0 & (xy) = (0,0) \end{cases}$$

(3) फलन $f(x) = x\cos x$ के लिए अंतराल $(-\pi, \pi)$ में फूरियर श्रेणी ज्ञात कीजिए|
Find the Fourier series of the function $f(x) = x\cos x$ in the interval $(-\pi, \pi)$

Unit-V

(1) समाकलन गणित का मूलभूत प्रमेय लिखिए एवं सिद्ध कीजिए|
State and prove Fundamental theorem of Integral Calculus.

(2) यदि $|t| < 1$ तो सिद्ध कीजिए कि If $|t|$, then prove that

$$\int_0^{\pi} \frac{\log(1+t\cos x)}{\cos x}\, dx = \pi \sin^{-1} t$$

$\int^1 dx$ ... के अभिसरण के लिए परीक्षण कीजिए| Checked

अर्द्धवार्षिक परीक्षा - 2022

विषय - गणित

प्रगति - 50

B.Sc - III

द्वितीय प्रश्न पत्र

अमूर्त विश्लेषण (Abstract Algebra)

सभी पाँच प्रश्न के उत्तर दीजिए प्रत्येक इकाई से दो प्रश्न करना अनिवार्य है सभी प्रश्नों के अंक समान है-

Unit-I

1) समूह का केन्द्र को परिभाषित कीजिए तथा सिद्ध कीजिए कि यह समूह का प्रसामान्य उपसमूह होता है।
Define centre of a group and prove that it is normal subgroup of the group.

2) सिद्ध कीजिए कि $O(G) = P^2$ जहाँ P अभाज्य संख्या है तब G आबेली समूह है।
Prove that if $O(G) = P^2$, where p is prime number, then G is abelian group.

(3) मान लीजिए कि G कोटि 108 का एक समूह है। दिखाइए कि G का कोटि 27 व 9 का प्रसामान्य उपसमूह का अस्तित्व होता है।
Let G be a group of order 108. Show that G has normal subgroups of order 27 and 9.

Unit-II

(1) R- समाकारिता का मूलभूत प्रमेय का कथन लिखकर सिद्ध कीजिए।
State and prove fundamental theorem of R-homomorphism.

2) निम्न बहुपदों का योग और गुणन $(I_6, +_6, \times_6)$ पर ज्ञात कीजिए
Find the sum and product of the following polynomials over the ring $(I_6, +_6, \times_6)$

$f(x) = 5 + 4x + 3x^2 + 2x^3$, $g(x) = 1 + 4x + 5x^2 + x^3$

3) यदि M एक R मॉड्यूल (प्रतिरूपक) है तथा A एवं B, M के दो उपमॉड्यूल है तब दर्शाइए कि A+B भी M का एक उपमॉड्यूल होगा।
If M is R-Module and A and B are two submodules of M then show that A+B is also a submodule of M.

Unit-III

1) किसी सदिश समष्टि $V(F)$ का एक ~~अरिक्त~~ उपसमुच्चय W, V का उपसमष्टि है, यदि और केवल यदि $a,b \in F$ तथा $\alpha, \beta \in W \Rightarrow a\alpha + b\beta \in W$
A non-empty subset W of a vector space $V(F)$ to be a vector subspace of V if and only if $a,b \in F$ and $\alpha, \beta \in W \Rightarrow a\alpha+b\beta \in W$

2) सिद्ध कीजिए कि सदिशों $(2,3,1)$, $(-1,4,-2)$ एवं $(1,18,-4)$ का समुच्चय $V_3(R)$ में रैखिकतः परतंत्र है।
Prove that the set of vectors $(2,3,1)$, $(-1,4,-2)$ and $(1,18,-4)$ is linearly dependent in $V_3(R)$

3) यदि W, एक परिमित विमीय सदिश समष्टि $V(F)$ का एक उपसमष्टि है तो दर्शाइए कि:-
If W is a subspace of a finite dimensional vector space $V(F)$ then $\dim \frac{V}{W} = \dim V - \dim W$

Unit-IV

(1) सिल्वेस्टर के शून्यता नियम का कथन लिखकर सिद्ध कीजिए।
State and prove Sylvester's law of Nullity.

(2) दर्शाइए कि निम्नलिखित आव्यूह A विकर्णीय है
Show that the following matrix A is diagonalizable $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

(3) सदिश समष्टि $V_3(R)$ के लिए आधार समुच्चय $B = \{(1,-2,3)\ (1,-1,1)\ (2,-4,7)\}$ का द्वैत आधार ज्ञात कीजिए।
Find the dual basis of the basis set $B = \{(1,-2,3)\ (1,-1,1)\ (2,-4,7)\}$ for $V_3(R)$

Unit-V

1) श्वार्ज असमिका का कथन लिखकर सिद्ध कीजिए।
State and prove Schwartz's inequality.

(2) सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक आन्तरगुणन समष्टि एक मानकित सदिश समष्टि होता है।
Prove that every inner product space is normed vector space.

3) ग्राम श्मिट के लाम्बिक प्रक्रम का प्रयोग करके $V_3(R)$ के आधार $B = \{(\beta_1, \beta_2, \beta_3)\}$ से एक प्रसामान्य लाम्बिक आधार प्राप्त कीजिए जहाँ $\beta_1 = (1,0,1)$, $\beta_2 = (1,2,-2)$ एवं $\beta_3 = (2,-1,1)$
Apply Gram-Schmidt orthogonalization process to obtain an orthono-

अर्द्धवार्षिक परीक्षा – 2022

विषय – गणित

पूर्णांक – 50

B.Sc – III

तृतीय प्रश्न पत्र

विविक्त गणित (Discrete Mathematics)

सभी पाँच प्रश्नों के उत्तर दीजिए प्रत्येक इकाई से दो प्रश्न करना अनिवार्य है
सभी प्रश्नों के अंक समान है –

Unit-I

1) गणितीय आगमन विधि से सिद्ध कीजिए कि

$$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$$ सभी $n\geq 1$ के लिए।

Prove by Mathematical induction:-

$$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$$ for all $n\geq 1$

2) भाषा $L=\{a^i b^j \mid i,j\geq 1, i\neq j\}$ के लिए व्याकरण की संरचना कीजिए।
Construct a grammar for the language $L=\{a^i b^j \mid i,j\geq 1, i\neq j\}$

3) दर्शाइए कि Show that

$$^{2n+2}C_{n+1}={}^{2n}C_{n+1}+2.{}^{2n}C_n+{}^{2n}C_{n-1}$$

Unit-II

1) यदि R, समुच्चय A में तुल्यता सम्बन्ध है तो सिद्ध कीजिए कि R^{-1} भी समुच्चय A में तुल्यता सम्बन्ध होता है।
If R is an equivalence relation in the set A, then prove that R^{-1} is also an equivalence relation in the set A.

2) किसी समतलीय आलेख के लिए यूलर सूत्र लिखिए एवं सिद्ध कीजिए।
State and prove Euler's formula for a planar graph.

3) मान लीजिए कि $(L,\leq)$ एक लैटिस है। तब किन्हीं $a,b\in L$ के लिए दर्शाइए कि
Let $(L,\leq)$ be a Lattice, Then for any $a,b\in L$ show that
(i) $a\leq b \Leftrightarrow a\wedge b=a$ (ii) $a\leq b\Leftrightarrow a\vee b=b$

Unit-III

(1) मानलो a तथा b दो संख्यात्मक फलन है। a तथा b का भागफल जिसे a/b से प्रकट करते है, एक संख्यात्मक फलन है जिसका r पर मान a_r/b_r है। मान लीजिए $d=a/b$ दर्शाइए कि :-

Let a and b be two numerical functions. The quotient of a and b is denoted by a/b is a numerical function whose value at r be a_r/b_r. Let $d = a/b$ show that

$$\Delta d_r = \frac{b_r \Delta a_r - a_r \Delta b_r}{b_r b_{r+1}}$$

(2) एक उदाहरण सहित 'बबल सॉर्ट एल्गोरिथ्म' लिखिए।
To write "Algorithm of Bubble Sort" with a example.

(3) यदि a तथा b दो संख्यात्मक फलन $a = r + O\left(\frac{1}{r}\right)$, $b = \sqrt{r} + O\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right)$ से दिए जाते हैं तब दर्शाइए कि :- $ab = r^{3/2} + O(\sqrt{r})$

If a and b be two numeric functions given by $a = r + O\left(\frac{1}{r}\right)$, $b = \sqrt{r} + O\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right)$ then show that

$$ab = r^{3/2} + O(\sqrt{r})$$

Unit-IV

1) निम्नलिखित अंतर समीकरण का विशेष हल ज्ञात कीजिए :-
Find the particular solution of the following difference equation

$$a_r + 5a_{r-1} + 6a_{r-2} = 3r^2 - 2r + 1$$

2) सिद्ध कीजिए कि किसी परिमित समूह के प्रत्येक उपसमूह की कोटि समूह की कोटि का भाजक होता है।
Prove that the order of each subgroup of a finite group is a divisor of the order of the group.

3) पुनरावृत्ति सम्बन्ध $9a_r - 6a_{r-1} + a_{r-2} = 0$ को हल कीजिए दिया गया है कि $a_0 = 0$ और $a_1 = 1$।
Solve the recurrence relation $9a_r - 6a_{r-1} + a_{r-2} = 0$ Given the $a_0 = 0$ and $a_1 = 1$

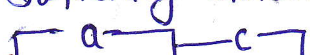
Unit-V

1) सिद्ध कीजिए कि दो जालकों का सीधा गुणन एक जालक होता है।
Prove that direct product of two lattices is a lattice.

(2) निम्नलिखित फलन का वियोजी प्रसामान्य रूप ज्ञात कीजिए:-
Find disjunctive normal form of the following function

$$f(x,y,z) = [(x+y') + (y+z')' + yz]$$

(3) निम्नलिखित स्विचन परिपथ को सरलीकृत परिपथ में बदलिये :-
Replace the following switching circuit by a simpler one



Thakkar